

Egzamin z Elementów Logiki i Teorii Mnogości

I termin

16 lutego 2014r.

1. ZADANIA

Zadanie 1. Sprawdź, która z poniższych formuł jest tautologią:

(a) $((p \wedge q) \vee (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q),$ (2p.)

(b) $[((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge ((p \vee q) \rightarrow \neg r)] \rightarrow (p \vee q \vee r).$ (3p.)

Zadanie 2. Oceń poprawność następującego rozumowania: (3p.)

Jeżeli Kubuś wyjadł miodek, to o ile akt ten wyszedł na jaw, to Kubuś został skarcony przez Przyjaciół. Kubuś nie został skarcony przez Przyjaciół. Zatem Kubuś nie wyjadł miodku lub akt ten nie wyszedł na jaw.

Zadanie 3. Zaznacz na rysunku zbiór

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x \cdot y| > 0 \rightarrow \forall_{z \in \mathbb{R}} (x \cdot z = y \cdot z)\}. \quad (3p.)$$

Zadanie 4. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie zadana wzorem $f(x) = 2^{|x|}$.

(a) Sprawdź, czy f jest iniekcją. (2p.)

(b) Sprawdź, czy f jest suriekcją. (2p.)

(c) Wyznacz obraz zbioru $[-1, 1]$ przez funkcję f . (2p.)

(d) Wyznacz przeciwobraz zbioru $[2, 4]$ przez funkcję f . (2p.)

Zadanie 5. Wyznacz $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, gdzie

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{n+1} < x < 2 + \frac{1}{n+1} \right\}. \quad (4p.)$$

Zadanie 6. Dana jest relacja $r \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniowana następująco:

$$ArB \leftrightarrow (A = B \vee (A \cup B = \mathbb{N} \wedge A \cap B = \emptyset)).$$

(a) Pokaż, że r jest relacją równoważności (2p.)

(b) Wyznacz klasy abstrakcji relacji r . (3p.)

(c) Podaj moc zbioru ilorazowego $\mathcal{P}(\mathbb{N})/r$. (2p.)

2. TEORIA

Zadanie 1. Definicja formuły spełnialnej w klasycznym rachunku zdań. Przykład formuły spełnialnej. Przykład formuły niespełnialnej. (3p.)

Zadanie 2. Definicja tautologii rachunku kwantyfikatorów. Przykład czterech tautologii rachunku kwantyfikatorów. (3p.)

Zadanie 3. Definicja posetu. Definicja posetu gęstego. Przykład posetu gęstego. Przykład posetu, który nie jest gęsty. (4p.)

Zadanie 4. Definicja równoliczności zbiorów. Przykład trzech różnych nieskończonych zbiorów równolicznych. Definicja zbioru przeliczalnego. Dowód, że zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny. (10p.)

Zadanie 5. Twierdzenie Cantora wraz z dowodem. (10p.)