

Zadanie 1. Oceń, który z poniższych napisów jest formułą logiczną:

- (a) $p \rightarrow p$,
- (b) $p \rightarrow \rightarrow p$,
- (c) $\neg \neg \neg p$,
- (d) $\neg p \rightarrow \neg q$,
- (e) formuła,
- (f) $p \vee q \rightarrow r$,
- (g) $\vee \wedge$.

Zadanie 2. Zdefiniujmy rozmiar formuły jako liczbę spójników występujących w tej formule. Na przykład formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$ ma rozmiar 4. Ile jest różnych formuł nad jedną zmienną o długości 3?

Zadanie 3. Określ wartościowanie poniższych formuł znając wartościowanie zmiennych zdaniowych: $v(p) = \mathbf{0}$, $v(q) = \mathbf{1}$, $v(r) = \mathbf{0}$:

- (a) $q \rightarrow p$,
- (b) $r \rightarrow (q \rightarrow p)$,
- (c) $\neg p \rightarrow r$,
- (d) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$,
- (e) $p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- (f) $\neg \neg q \rightarrow p$,
- (g) $(\neg q \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg q)$.

Zadanie 4. Podaj wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym cała formuła jest fałszywa:

- (a) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$,
- (b) $\neg p \rightarrow q$,
- (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow q$.

Podaj wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym cała formuła jest prawdziwa:

- (a') $\neg(p \rightarrow q)$,
- (b') $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$,
- (c') $(\neg q \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg q)$.

Zadanie 5. Które z poniższych formuł są tautologiami:

- (a) $((p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) \rightarrow (p \vee q)$,
- (b) $(p \vee q) \rightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee \neg r))$,
- (c) $((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow p \wedge r$,
- (d) $(p \wedge q) \rightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))$.

Zadanie 6. Ile jest spójników n -argumentowych?

Zadanie 7. Zdefiniuj alternatywę za pomocą samej implikacji.

Zadanie 8. Czy spójniki binarne zdefiniowane za pomocą formuł zawierających tylko spójniki przemienne są przemienne?

Zadanie 9. Pokaż, że $\{\wedge\}$ nie jest funkcjonalnie pełny.

Zadanie 10. Sprawdź, czy poniższe formuły są spełnialne:

- (a) $\neg(p \rightarrow \neg p)$,
- (b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$,

- (c) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p)$,
- (d) $(q \rightarrow (p \wedge r)) \wedge ((p \vee r) \rightarrow q)$,
- (e) $((p \wedge \neg q) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Zadanie 11. Znajdź najkrótsze formuły CNF równoważne następującym formułom:

- (a) $p \leftrightarrow q$,
- (b) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,
- (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow p$,
- (d) $p \rightarrow (q \wedge (\neg p \rightarrow q))$,
- (e) $p \vee ((q \wedge p) \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p))$,
- (f) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \rightarrow \neg q))$.

Zadanie 12. Sprawdź, na ile sposobów można wstawić nawiasy w poniższych ciągach, aby otrzymać formuły:

- (a) $p \rightarrow \neg q \vee r \wedge p$,
- (b) $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow \neg p \rightarrow \neg q$.

Zadanie 13. Sprawdź, czy następujące formuły są tautologiami:

- (a) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow (q \wedge p))$,
- (b) $\neg(p \rightarrow \neg(q \wedge p)) \rightarrow (p \vee q)$,
- (c) $((p \wedge \neg q) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$,
- (d) $(p \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((\neg q \rightarrow p) \vee q)$.

Zadanie 14. Wskaż spójnik binarny, za pomocą którego można zdefiniować wszystkie pozostałe spójniki binarne.

Zadanie 15. Pokaż, że za pomocą alternatywy i koniunkcji nie można zdefiniować implikacji ani NAND.

Zadanie 16. Jakie funkcje można zdefiniować za pomocą samej implikacji?

Zadanie 17. Ile jest spójników binarnych $\circ$ takich, że zdanie $(p \circ q) \circ (p \circ q)$ jest tautologią?

Zadanie 18. Ile jest binarnych spójników przemiennych?

Zadanie 19. Pokaż łączność alternatywy, koniunkcji, równoważności i XOR-a.

Zadanie 20. Pokaż, że jeśli Ψ jest tautologią, to jest nią również

- (a) $\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow \Psi) \dots)$,
- (b) $\neg \Psi \rightarrow (\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\Phi_{n-1} \rightarrow \Phi_n) \dots))$.

Zadanie 21. Dla jakich n (liczba wystąpień p) poniższe wyrażenie jest tautologią

$$\underbrace{(\dots ((p \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow \dots)}_n \rightarrow p.$$

Zadanie 22. Zbuduj formułę z trzema zmiennymi, która

- (a) jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie dwie jej zmienne mają wartość fałsz,
- (b) przyjmuje taką wartość jak większość jej zmiennych.

Zadanie 23. Dobierz formułę φ tak, aby poniższa formuła była tautologią:

- (a) $((\varphi \wedge q) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \varphi)$,
- (b) $((r \rightarrow (\neg q \wedge p)) \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \wedge (p \rightarrow q) \wedge r)$.

Zadanie 24. Oceń poprawność następujących rozumowań:

- (a) Jeśli Jan nie lubi logiki, to twierdzi, że ma zainteresowania humanistyczne, a znajomość logiki jest humanistom niepotrzebna. Zatem jeśli Jan twierdzi, że ma zainteresowania humanistyczne, to uważa, że znajomość logiki jest humanistom niepotrzebna.
- (b) Jeśli Jan uczy się logiki, to jeśli jego poglądy są wewnętrznie sprzeczne, to je zmieni. Jeśli jednak zmieni poglądy, to straci autorytet. Zatem jeśli jego poglądy są wewnętrznie sprzeczne, lecz Jan nie uczy się logiki, to nie straci autorytetu.
- (c) Jeśli Lolek jest agentem, to jest nim też Bolek, a nie jest nim Tola. Jeśli Bolek jest agentem, to jest nim też Lolek lub Tola. Jeśli jednak Tola nie jest agentem, to jest nim Lolek, ale nie Bolek. Zatem agentem jest Tola.

Zadanie 25. Pokaż, że formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych za pomocą $\leftrightarrow$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej zmienna występuje w niej parzystą liczbę razy.

Zadanie 26. Zdefiniujmy $p^0 := p$ oraz $p^1 := \neg p$. Niech $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ dla $i = 1, \dots, n$. Dla jakich ciągów $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ formuła

$$(\dots (p^{\varepsilon_1} \rightarrow p^{\varepsilon_2}) \rightarrow \dots) \rightarrow p^{\varepsilon_n}$$

jest tautologią?

Zadanie 27. Rozważmy model M , którego dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Załóżmy, że w M jest predykat binarny, oznaczony symbolem p taki, że $p(x, y)$ jest prawda wtedy i tylko wtedy, gdy x dzieli y . Napisz formuły, które w modelu M są równoważne następującym zdaniom:

- (a) $x = 0$,
- (b) $x = 1$,
- (c) $x = y$,
- (d) $x \geq y$,
- (e) $x > y$,
- (f) x jest liczbą pierwszą,
- (g) x jest kwadratem liczb pierwszych,
- (h) x jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych,
- (i) x jest potęgą liczby pierwszej,
- (j) dla każdych dwóch liczb istnieje ich największy wspólny dzielnik,
- (k) dla każdych dwóch liczb istnieje ich najmniejsza wspólna wielokrotność,
- (l) x i y są względnie pierwsze.

Zadanie 28. Rozważmy model M , którego dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Załóżmy, że w M są dwa predykaty p i s takie, że

$$p(x, y, z) = \mathbf{1} \equiv x + y = z, \quad s(x, y, z) = \mathbf{1} \equiv x \cdot y = z.$$

Napisz formuły, które w modelu M są równoważne następującym zdaniom:

- (a) $x = 0$,
- (b) $x = 1$,
- (c) $x = 2$,
- (d) x jest parzyste,
- (e) x jest nieparzyste,
- (f) x jest liczbą pierwszą,
- (g) $x = y$,
- (h) $x \leq y$,
- (i) $x < y$,

- (j) x dzieli y ,
- (k) x i y są bliźniaczymi liczbami pierwszymi,
- (l) z jest najmniejszą wspólną wielokrotnością x i y ,
- (m) z jest największym wspólnym dzielnikiem x i y ,
- (n) dodawanie jest przemienne,
- (o) dodawanie jest łączne,
- (p) zbiór liczb naturalnych jest nieskończony,
- (q) każda liczba jest sumą czterech kwadratów jakichś liczb naturalnych.