

Zadanie 1. Wskaż zmienne wolne i związane:

- (a) $p(z) \rightarrow \exists_z p(z)$,
- (b) $\forall_y (\exists_z q(y, z) \rightarrow q(y, z))$,
- (c) $q(x, y) \rightarrow \forall_x (q(x, y) \rightarrow \forall_y q(x, y))$.

Zadanie 2. Dla każdej z poniższych formuł znajdź model, w którym jest prawdziwa i model, w którym jest fałszywa:

- (a) $\forall_x \forall_y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$,
- (b) $(\forall_x \exists_y P(x, y)) \rightarrow \exists_y \forall_x P(x, y)$,
- (c) $\forall_y ((\forall_x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge Q(y)) \rightarrow P(z))$,
- (d) $\forall x \forall_y (P(x, y) \rightarrow \exists_z (P(x, z) \wedge P(z, y)))$.

Zadanie 3. Zaznacz na rysunku zbiory:

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_y x^2 + y^2 = 1\}$,
- (b) $\{x \in \mathbb{R} : \forall_y x^2 + y^2 = 1\}$,
- (c) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_y x \cdot y = 1\}$,
- (d) $\{x \in \mathbb{R} : \forall_y x \cdot y = 1\}$,
- (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists_z y^2 + y^2 = x^2\}$,
- (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall_z y^2 + y^2 \neq x^2\}$,
- (g) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_y \sqrt{1 - y^2} = x\}$,
- (h) $\{x \in \mathbb{R} : \forall_y \sqrt{1 - y^2} = x\}$,
- (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \cdot x < 0) \rightarrow (x \cdot x > 0)\}$,
- (j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall_z (y^2 + (x - z)^2 \neq 1) \rightarrow \exists_z ((x - z)^2 + (y - z)^2 = 1)\}$.

Zadanie⁺ 4. Pokaż, że formuła

$$\forall_x \exists_y P(x, y) \wedge \forall_x \forall_y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \wedge \forall_x \forall_y \forall_z (P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow P(x, z)))$$

jest spełnialna w pewnym modelu nieskończonym, a fałszywa we wszystkich modelach skończonych.

Zadanie⁺ 5. Pokaż, że formuła

$$\exists_x \forall_y (F(x, y) \rightarrow (\neg F(y, x) \rightarrow (F(x, x) \leftrightarrow F(y, y))))$$

jest prawdziwa w każdym modelu zawierającym nie więcej niż trzy elementy.

Zadanie 6. Podaj wszystkie elementy poniższych zbiorów:

- (a) $\{0, 1, 2, 3\}$,
- (b) $\emptyset$,
- (c) $\{a, b, c\}$,
- (d) $\{1, \{2, 3\}, 4\}$,
- (e) $\{a, \{b, \{c\}\}, d\}$,
- (f) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- (g) $\{n \in \mathbb{N} : n|12\}$,
- (h) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\}$,
- (i) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 0\}$.

Zadanie 7. Podaj przykład takich zbiorów A , B i C , że $A \in B$, $B \in C$ oraz $A \notin C$.

Zadanie 8. Dla podanych zbiorów A i B wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \div B$:

- (a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$,
- (b) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$, $B = \{1, \{2\}\}$,

- (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x + 1 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - x - 1 < 0\}$,
 (d) $A = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{4n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 9. Niech X będzie przestrzenią oraz $A, B \subseteq X$. Udowodnij, że

$$A \subseteq B \leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \leftrightarrow A' \cup B = X.$$

Zadanie 10. Czy istnieją zbiory A , B i C takie, że

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

Zadanie 11. Udowodnij tożsamości:

- (a) $A \cup A = A \cap A = A$,
 (b) $A \cap B = B \cap A$,
 (c) $A \cup B = B \cup A$,
 (d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 (e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 (f) $(A \cap B)' = A' \cup B'$,
 (g) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
 (h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
 (i) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$,
 (j) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Zadanie 12. Udowodnij, że:

- (a) $A \subseteq B \cap C \leftrightarrow A \subseteq B$ i $A \subseteq C$,
 (b) $A \cap (B \cup C) = A \cap (B \cap C) \leftrightarrow C \subseteq A$,
 (c) $A \cap B = A \cup B \leftrightarrow A = B$,
 (d) $A = B' \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = X$.

Zadanie 13. Udowodnij tożsamości:

- (a) $A \div B = B \div A$,
 (b) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$,
 (c) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$,
 (d) $A \div (A \div B) = B$,
 (e) $A \cup B = (A \div B) \cup (A \cap B)$.

Zadanie 14. Udowodnij, że:

- (a) $(A_1 \cup \dots \cup A_n) \div (B_1 \cup \dots \cup B_n) \subseteq (A_1 \div B_1) \cup \dots \cup (A_n \div B_n)$,
 (b) $(A_1 \cap \dots \cap A_n) \div (B_1 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \div B_1) \cup \dots \cup (A_n \div B_n)$,

Zadanie 15. Zdefiniuj $\cup$, $\cap$, $\setminus$ za pomocą:

- (a) $\div, \cap$,
 (b) $\div, \cup$,
 (c) $\setminus, \div$.

Zadanie⁺ 16. Pokaż, że nie można zdefiniować:

- (a) $\setminus$ za pomocą $\cup, \cap$,
 (b) $\cup$ za pomocą $\cap, \setminus$.

Zadanie⁺ 17. Rozwiąż układy równań:

- (a) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$ gdzie $B \subseteq A \subseteq C$.
 (b) $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$ gdzie $B \subseteq A$ i $A \cap C = \emptyset$.

$$(c) \begin{cases} A \setminus X &= B \\ A \cup X &= C \end{cases} \text{ gdzie } B \subseteq A \subseteq C.$$