

Zadanie 1. Znajdź sumę i iloczyn zbiorów dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $i \in \mathbb{R}^+$:

- (a) $A_i = \{x: i \leq x < i + 1\}$,
- (b) $A_i = \{x: -i \leq x \leq i\}$,
- (c) $A_i = \{x: i \leq x\}$,
- (d) $A_i = \{x: \sqrt{i} \leq x < \sqrt{2i}\}$,
- (e) $A_i = \{x: i^{1/i+1} < x < (i+1)^{1/i+1}\}$,
- (f) $A_i = \{x: -(i+1)^2 < x < 2i^2 - 5i + 5\}$,
- (g) $A_i = \{x: \sin x = i\}$.

Zadanie 2. Niech $A_{n,m} \subseteq \mathbb{R}$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$. Znajdź $\bigcup_{n,m} A_{n,m}$, $\bigcap_{n,m} A_{n,m}$, $\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}$ oraz $\bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$, gdy:

- (a) $A_{n,m} = \{x: n^2 \leq x < m^2\}$,
- (b) $A_{n,m} = \{x: n \leq x \leq m\}$,
- (c) $A_{n,m} = \{x: n^2 \leq x < m^2 + (n+1)^2\}$,
- (d) $A_{n,m} = \{x: n^m \leq x\}$ (tu $n > 0$).

Zadanie 3. Udowodnij, że:

- (a) $\bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}$,
- (b) $\bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij} = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_{ij}$,
- (c) $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}$,
- (d) w powyższym podpunkcie nie można zamienić inkluzji na równość,
- (e) jeśli $A_i \subseteq B$ dla wszystkich $i \in I$, to $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$,
- (f) jeśli $B \subseteq A_i$ dla wszystkich $i \in I$, to $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$,
- (g) jeśli $A_i \subseteq B_i$ dla wszystkich $i \in I$, to $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$,
- (h)⁺ $\bigcup_{i \in I} A_i$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym wszystkie zbiory A_i ,
- (i)⁺ $\bigcap_{i \in I} A_i$ jest największym zbiorem zawartym we wszystkich zbiorach A_i ,
- (j)⁺ jeśli $(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n) \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} B_n) = \emptyset$, to $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} (A_n \cap (B_{n-1} \setminus B_n))$, gdzie $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} B_n) \subseteq B_0$,
- (h) $\mathcal{P}(A \cup B) = \{A_1 \cup B_1: A_1 \in \mathcal{P}(A), B_1 \in \mathcal{P}(B)\}$,
- (l)⁺ $\mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \{\bigcup_{i \in I} B_i: B_i \in \mathcal{P}(A_i)\}$.

Zadanie 4. Wskaż zbiory A , B i C takie, że:

- (a) $A \times B \neq B \times A$,
- (b) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

Zadanie 5. Udowodnij, że:

- (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
- (b) $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$, gdzie $A \subseteq C$ i $B \subseteq D$,
- (c) $\bigcup_{i \in I} A_i \times \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$,
- (d) $\bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$,
- (e) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ (kiedy zachodzi równość?).

Zadanie 6. Czy jeśli $X \subseteq \mathcal{P}(X)$, to $X = \emptyset$?

Zadanie 7. Sprawdź, czy zachodzi implikacja

$$x \subseteq \mathcal{P}(x) \Rightarrow \bigcup x \subseteq x.$$

Zadanie 8. Sprawdź, czy zachodzi równość

$$\bigcap \mathcal{P}(x \cap y) = \mathcal{P}(\bigcap x) \cap \mathcal{P}(\bigcap y).$$

Zadanie 9. Niech $x \subseteq y$. Zbadaj, jakie zależności zachodzą pomiędzy

(a) $\bigcup x$ oraz $\bigcup y$,

(b) $\bigcap x$ oraz $\bigcap y$.

Zadanie 10. Wskaż zbiór A taki, że $A \cap \bigcup A$ ma dokładnie trzy elementy.

Zadanie 11. Wskaż zbiór A taki, że $A \cap \mathcal{P}(A)$ ma dokładnie cztery elementy.

Zadanie 12. Czy istnieje zbiór A taki, że $\mathcal{P}(\bigcup A) = A$?

Zadanie 13. Zbadaj, jakie zależności zachodzą pomiędzy

(a) $\bigcup \bigcap_{i \in I} A_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} \bigcup A_i$,

(b) $\bigcap \bigcup_{i \in I} A_i$ oraz $\bigcup_{i \in I} \bigcap A_i$.

Zadanie 14. Dla jakich $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zachodzi warunek:

(a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$,

(b) $\forall C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) (A \cap C = C \Rightarrow (A = C \vee \neg \exists D \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) (D \neq \emptyset \wedge D \subseteq C)))$.

ZADANIA DLA AMBITNYCH

Zadanie⁺ 15. Dla dowolnego zbioru A definiujemy $\bullet A := \{\bigcup a : a \in A\}$. Sprawdź, czy zawsze zachodzi równość $\mathcal{P}(\bullet X) = \bullet \mathcal{P}(X)$.

Zadanie⁺ 16. Dla zbioru A niech $\mathcal{P}_2(A)$ oznacza rodzinę wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru A . Niech X i Y będą rozłącznymi zbiorami, których suma jest równa $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$. Pokaż, że istnieje nieskończony zbiór A taki, że $\mathcal{P}_2(A) \subseteq X$ lub $\mathcal{P}_2(A) \subseteq Y$.

Zadanie⁺ 17. Sprawdź, czy dla dowolnych zbiorów zachodzi równość

$$\bigcup \bigcup \bigcup (\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)) = X \cup Y.$$

Zadanie⁺ 18. Pokaż, że dla każdej pary (a, b) zachodzi $\bigcap \bigcap (a, b) = a$.

Zadanie⁺ 19. Pokaż, że dla każdej pary x można otrzymać jej drugą współrzędną posługując się jedynie parą x , operacjami $\bigcup, \bigcap, \cup, \cap, \setminus, \mathcal{P}$ oraz stałą $\emptyset$.

Zadanie⁺ 20. Niech $R \subseteq A \times B$. Definiujemy

$$\diamond R = \{\bigcup r : r \in R\}, \quad \circ R = \{\bigcap r : r \in R\}.$$

(a) Czy $\bigcup \diamond R = \bigcup \bigcup R$?

(b) Czy $\bigcap \circ R = \{a : \exists b (a, b) \in R\}$?

Zadanie⁺ 21. Niech X będzie zbiorem oraz niech $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie rodziną podzbiorów X spełniającą poniższe warunki:

(i) $X \in \mathcal{T}$,

- (ii) jeżeli $A \subseteq \mathcal{T}$, to $\bigcup A \in \mathcal{T}$,
- (iii) jeżeli $A, B \in \mathcal{T}$, to $A \cap B \in \mathcal{T}$.

Na $\mathcal{P}(X)$ definiujemy operator int w następujący sposób:

$$\text{int } A = \bigcup \{B \in \mathcal{T} : B \subseteq A\}, \quad A \subseteq X.$$

Pokaż, że

- (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$,
- (b) $\text{int } A \subseteq A$,
- (c) $\text{int } \emptyset = \emptyset$,
- (d) $\text{int } X = X$,
- (e) $\text{int } A = \text{int}(\text{int } A)$,
- (f) $\text{int } A = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{T}$,
- (g) jeżeli $A \subseteq B$, to $\text{int } A \subseteq \text{int } B$,
- (h) $\text{int } A = U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subseteq A$, $U \in \mathcal{T}$ oraz $\forall_V (V \subseteq A, V \in \mathcal{T} \rightarrow V \subseteq U)$,
- (i) $\text{int } A \cup \text{int } B \subseteq \text{int}(A \cup B)$.