

ZADANIA PROSTE

Zadanie 1. Niech $R, S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ będą zdefiniowane następująco:

$$xRy \leftrightarrow x|y, \quad xSy \leftrightarrow y = x^2.$$

Wyznacz $R, S, R \cup S, R \cap S, R \setminus S, S \setminus R, R^{-1}, S^{-1}, R \circ S, S \circ R$. Dla obu relacji narysuj odpowiednie tabelki i grafy. Na tej podstawie oceń, czy relacje R i S są zwrotne, symetryczne i przechodnie.

Zadanie 2. Zbadaj, jakie własności mają poniższe relacje:

- (a) $R \subseteq \mathbb{R}^2, \quad xRy \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q},$
- (b) $R \subseteq \mathbb{R}^2, \quad xRy \leftrightarrow x - y \notin \mathbb{N},$
- (c) $R \subseteq \mathbb{R}^2, \quad xRy \leftrightarrow |x - 2| = |y + 2|,$
- (d) $R \subseteq \mathbb{N}^2, \quad xRy \leftrightarrow 5|(x - y),$
- (e) $R \subseteq \mathbb{N}^2, \quad xRy \leftrightarrow |x + y| = 1,$
- (f) $R \subseteq \mathbb{R}^2, \quad xRy \leftrightarrow x < y \vee y < x,$
- (g) $R \subseteq \mathbb{R}^2, \quad xRy \leftrightarrow |x| < |y|,$
- (h) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2)R(y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2,$
- (i) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2)R(y_1, y_2) \leftrightarrow (x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)).$

W każdym przypadku podaj dziedzinę i przeciwdziedzinę badanej relacji.

Zadanie 3. Podaj przykład relacji, która:

- (a) jest zwrotna, symetryczna, ale nie jest przechodnia,
- (b) jest zwrotna, antysymetryczna, ale nie jest przechodnia,
- (c) jest zwrotna, przechodnia, ale nie jest symetryczna,
- (d) jest antysymetryczna, przechodnia, ale nie jest zwrotna,
- (e) jest symetryczna, przechodnia, ale nie jest zwrotna.

Zadanie 4. Niech A oraz B będą zbiorami skończonymi o odpowiednio n i m elementach. Ile istnieje relacji między elementami zbiorów A i B ?

Zadanie 5. Pokaż, że jeśli $R \subseteq S$, to dla dowolnej relacji T zachodzi:

- (a) $T \circ R \subseteq T \circ S,$
- (b) $R \circ T \subseteq S \circ T,$
- (c) $R^{-1} \subseteq S^{-1}.$

Zadanie 6. Pokaż, że dla dowolnych relacji R, R_i, S, T zachodzą równości/inkluzje:

- (a) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T,$
- (b) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1},$
- (c) $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ S = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ S),$
- (d) $S \circ (\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} (S \circ R_i),$
- (e) $(\bigcap_{i \in I} R_i) \circ S \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ S),$
- (f) $S \circ (\bigcap_{i \in I} R_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (S \circ R_i).$

Pokaż, dlaczego w dwóch ostatnich punktach inkluzji nie można zastąpić równością.

Zadanie 7. Sprawdź, czy dla dowolnych relacji R i S oraz dowolnego zbioru A zachodzą równości:

- (a) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$,
- (b) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$,
- (c) $1_A^{-1} = 1_A$,
- (d) $(A^2)^{-1} = A^2$.

Zadanie 8. Sprawdź, czy poniższe relacje są relacjami równoważności. Jeśli tak, to wyznacz klasy abstrakcji:

- (a) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in R \leftrightarrow x^2 = y^2$,
- (b) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in R \leftrightarrow |x| = |y|$,
- (c) $R \subseteq \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \in R \leftrightarrow x = -y$,
- (d) $R \subseteq (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^2$, $(x, y) \in R \leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$,
- (e) $R \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$, $(x, y) \in R \leftrightarrow \frac{x}{y} > 0$,
- (f) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $xRy \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$,
- (g) $R \subseteq \mathbb{N}^2$, $xRy \leftrightarrow (x, y \text{ parzyste i } x = y) \text{ lub } (x, y \text{ nieparzyste i } 3|x - y|)$,
- (h) $R \subseteq (\mathbb{R}[t] \setminus \{0\})^2$, $xRy \leftrightarrow x \cdot y \text{ jest stopnia parzystego}$,
- (i) $R \subseteq (\mathbb{R}[t])^2$, $xRy \leftrightarrow x \cdot y \text{ jest stopnia nieparzystego}$,
- (j) $R \subseteq \mathbb{N}^2$, $xRy \leftrightarrow \exists_{k, \ell \in \mathbb{N}} (k > 0 \wedge \ell > 0 \wedge x^k = y^\ell)$.

Uwaga: $\mathbb{R}[t]$ to zbiór wielomianów jednej zmiennej t o współczynnikach rzeczywistych (np. $2t^2 - 3$ lub $-3t^3 + 2t - \sqrt{2}$).

Zadanie 9. Pokaż, że jeśli R jest relacją równoważności, to R^{-1} również.

Zadanie 10. Pokaż, że relacja symetryczna i antysymetryczna jest przechodnia.

ZADANIA DODATKOWE (ALE TEŻ PROSTE)

Zadanie 11. Dla jakich relacji $R \subseteq A \times B$ zachodzi $R^{-1} = (A \times B) \setminus R$?

Zadanie 12. Niech $\mathcal{R}$ będzie taką niepustą rodziną relacji przechodnich w zbiorze A , że dla dowolnych $R, S \in \mathcal{R}$ zachodzi $R \subseteq S$ lub $S \subseteq R$. Pokaż, że $\bigcup \mathcal{R}$ jest relacją przechodnią.

Zadanie 13. Udowodnij, że dla relacji $R \subseteq A^2$ istnieje najmniejsza relacja przechodnia zawierająca R .

Zadanie 14. Niech $R \subseteq A \times A$, gdzie $A \neq \emptyset$. Czy prawdą jest, że jeśli $R \circ R$ jest relacją równoważności, to relacja R jest:

- (a) zwrotna,
- (b) symetryczna,
- (c) przechodnia.

W każdym przypadku podaj dowód lub kontrprzykład.

Zadanie 15. Pokaż, że A jest relacją wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq (\bigcup \bigcup A) \times (\bigcup \bigcup A)$.