

ZADANIA PROSTE

Zadanie 1. Wyznacz, o ile to możliwe, złożenia funkcji $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, gdzie:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \sin 6x, \\ g: [-6, 6] &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= \frac{x}{3}, \\ h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & h(x) &= 3x + 1. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli f jest funkcją z A w B oraz g jest funkcją z B w C , to złożenie $g \circ f$ jest funkcją z A w C .

Zadanie 3. Sprawdź, czy podana relacja jest funkcją. Jeśli tak, to zbadaj iniektywność, suriektywność i bijektywność. Jeśli podana funkcja jest bijekcją, wyznacz funkcję odwrotną.

- (a) $R \subseteq (\mathcal{P}(X))^2$, $ARB \leftrightarrow A \cup B = X$ oraz $A \cap B = \emptyset$,
- (b) $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$, $(n, m)Rk \leftrightarrow k$ jest największym wspólnym dzielnikiem n i m ,
- (c) $R \subseteq (\mathbb{R}[t])^2$, $fRg \leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} f(t) + g(t) = 0$,
- (d) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $xRy \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R} y = \frac{x+z}{2}$.

Zadanie 4. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$. Wyznacz $f([-1, 1) \cup \{2\})$.

Zadanie 5. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x) = \begin{cases} x + 3/2 & x \leq 1/2 \\ -2x + 2 & x > 1/2 \end{cases}$. Wyznacz $f((0, 1/2])$ oraz $f^{-1}((0, 1) \cup \{2\})$.

Zadanie 6. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie funkcją zadaną wzorem $\varphi(x) = x \times [0, 0, 1]$.

- (a) Czy φ jest suriekcją?
- (b) Czy φ jest iniekcją?
- (c) Wyznacz obraz zbioru wektorów postaci $[0, t, 0]$, $t \in \mathbb{R}$.
- (d) Wyznacz $\varphi^{-1}(\{[0, 0, 0]\})$.
- (e) Wyznacz $\varphi^{-1}(\{[0, 0, t]: t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\})$.

Zadanie 7. Niech $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zadaną wzorem $\varphi((x, y)) = (x + y, x - y)$.

- (a) Czy φ jest suriekcją?
- (b) Czy φ jest iniekcją?
- (c) Wyznacz obraz prostej $y = x + 1$.
- (d) Wyznacz $\varphi(\{(0, 0)\})$.

Zadanie 8. Niech $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x) = x^2 + 1$.

- (a) Czy φ jest suriekcją?
- (b) Czy $[1, 2] \cap \mathbb{Q} \subseteq f(\mathbb{Q})$?
- (c) Wyznacz $f^{-1}(\{1, \frac{13}{9}\})$.
- (d) Wyznacz $f^{-1}([\frac{10}{9}, 2])$.

Zadanie 9. Pokaż, że złożenie suriekcji (iniekcji) jest suriekcją (iniekcją).

Zadanie 10. Pokaż, że funkcja $f: A \rightarrow A$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy f^n ($n \geq 1$) jest różnowartościowa.

Zadanie 11. Zdefiniujmy funkcję $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ następująco: $f(A) = \bigcup(A)$. Sprawdź, czy f jest iniekcją/suriekcją.