

Zadanie 1. Udowodnij, że poniższe zbiory są równoliczne:

- (a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{\text{Adam}, \text{Ewa}\}$,
- (b) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x^2 < 70\}$,
- (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \{0\}$,
- (d) dowolne dwa zbiory skończone o tej samej liczbie elementów,
- (e) $A = (a_1, a_2) \subseteq \mathbb{R}$, $B = (b_1, b_2) \subseteq \mathbb{R}$, gdzie $a_1 < a_2$ oraz $b_1 < b_2$,
- (f) $A = [a_1, a_2] \subseteq \mathbb{R}$, $B = [b_1, b_2] \subseteq \mathbb{R}$, gdzie $a_1 < a_2$ oraz $b_1 < b_2$,
- (g) $A = (0, 3)$, $B = [0, 1)$,
- (h) dowolna prosta i dowolny odcinek otwarty,
- (i) dowolny kwadrat i dowolny odcinek,
- (j) dowolne dwa okręgi.

Zadanie 2. Jaka jest moc poniższych zbiorów? Odpowiedź uzasadnij:

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$,
- (b) $\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = \sin y\}$,
- (c) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{y \in \mathbb{N}_+} x = \ln y\}$,
- (d) $\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = \tan y\}$,
- (e) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = 2y\}$,
- (f) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{n \in \mathbb{N}_+} x^n \in \mathbb{Q}\}$,
- (g) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{n \in \mathbb{N}_+} \sin^n x \in \mathbb{Q}\}$,
- (h) $\{x \in \mathbb{R} : \tan \frac{1}{x} \in \mathbb{N}\}$,
- (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5x - 4\}$,
- (j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$,
- (k) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$,
- (l) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,
- (m) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 3\}$,
- (n) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists_{w \in \mathbb{Q}} x - y = w\}$,
- (o) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.

Zadanie 3. Jaka jest moc poniższych zbiorów? Odpowiedź uzasadnij:

- (a) zbiór rozłącznych otwartych przedziałów liczb rzeczywistych,
- (b) zbiór rozłącznych trójkątów (z wnętrzem) na płaszczyźnie,
- (c) zbiór rozłącznych trójkątów (bez wnętrza) na płaszczyźnie,
- (d) zbiór trójkątów na płaszczyźnie, których wierzchołki mają obie współrzędne wymierne,
- (e) zbiór trójkątów na płaszczyźnie, których wierzchołki mają obie współrzędne niewymierne,
- (f) zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych,
- (g) zbiór macierzy o wyrazach wymiernych,
- (h) zbiór skończonych ciągów zero-jedynkowych,
- (i) zbiór nieskończonych ciągów zero-jedynkowych,
- (j) zbiór nieskończonych ciągów o wyrazach całkowitych stałych od pewnego miejsca,
- (k) zbiór nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych stałych od pewnego miejsca,
- (l) zbiór skończonych podzbiorów $\mathbb{Q}$,
- (m) zbiór wszystkich ściśle rosnących ciągów liczb naturalnych,
- (n) zbiór wszystkich ściśle rosnących ciągów liczb rzeczywistych,

- (o) zbiór okręgów, których środki leżą w punktach o współrzędnych wymiernych i o promieniach będących liczbami wymiernymi,
- (p) zbiór wszystkich relacji zwrotnych na $\mathbb{N}$,
- (q) zbiór wszystkich relacji antyzwrotnych na $\mathbb{N}$,
- (r) zbiór wszystkich relacji symetrycznych na $\mathbb{N}$,
- (s) zbiór wszystkich relacji antysymetrycznych na $\mathbb{N}$,
- (t) zbiór wszystkich relacji przechodnich na $\mathbb{N}$,
- (u) zbiór wszystkich relacji równoważności na $\mathbb{N}$.

Zadanie 4. Pokaż, że $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 5. Pokaż, że:

- (a) jeżeli $A \sim C$ i $A \subseteq B \subseteq C$, to $A \sim B \sim C$;
- (b) jeżeli $A \subseteq B$ i $A \sim A \cup C$, to $B \sim B \cup C$.

Zadanie 6. Czy dla każdej bijekcji $f: A \rightarrow A$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że f^n jest identycznością na A , gdy

- (a) A jest skończony,
- (b) $A = \mathbb{N}$.

Zadanie 7. Czy zbiór wszystkich trójkątów na płaszczyźnie, których jeden wierzchołek ma współrzędne niewymierne, a dwa pozostałe mają współrzędne wymierne, jest przeliczalny?

Zadanie 8. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2, Z$ spełnione są następujące warunki:

- (a) jeżeli $X_1 \sim X_2$ i $Y_1 \sim Y_2$, to $X_1^{Y_1} \sim X_2^{Y_2}$,
- (b) $X^{Y \times Z} \sim (X^Y)^Z$,
- (c) $X^{Y \times Z} \sim X^Z \times Y^Z$,
- (d) jeżeli $Y \cap Z = \emptyset$, to $X^{Y \cup Z} \sim X^Y \times X^Z$,
- (e) jeżeli $X \setminus Y \sim Y \setminus X$, to $X \sim Y$ (czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?).

Zadanie 9. Które z poniższych zbiorów są równoliczne:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{Q}}, 2^{\mathbb{R}}, \mathbb{Q}^{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{Q})?$$

Wykorzystaj twierdzenia z wykładu oraz fakty z poprzedniego zadania.

Zadanie 10. Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dana jest relacja R określona następująco:

$$fRg \Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} f(2n) = g(2n).$$

- (a) Pokaż, że R jest relacją równoważności.
- (b) Jaka jest moc klasy $[\{f(n) = 2n\}]$?
- (c) Pokaż, że dowolne dwie klasy są równoliczne i mają moc $\mathfrak{c}$.
- (d) Pokaż, że moc zbioru klas abstrakcji wynosi $\mathfrak{c}$.