

POWTÓRKA

Niech $z = x + iy$.

1. Część rzeczywista: $\operatorname{Re} z = x$, część urojona: $\operatorname{Im} z = y$.
2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Potęgowanie liczb zespolonych:

$$z^n = |z|^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

4. Pierwiastkowanie liczb zespolonych:

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\},$$

gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right).$$

5. Inne przydatne wzory:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

ZADANIA

Zadanie 1. Wyznacz graficznie następujące obszary:

- (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 4\}$,
- (b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \wedge 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$,
- (c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + 4i| < 5\}$,
- (d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \geq 2 \wedge \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0\}$.

Zadanie 2. Przedstaw w postaci trygonometrycznej:

- (a) -5 ,
- (b) $2i$,
- (c) $1 + i$,
- (d) $\sqrt{3} + i$.

Zadanie 3. Oblicz:

- (a) $(1 + i)^{10}$,
- (b) $(2 + i\sqrt{12})^5$,
- (c) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{30}$,
- (d) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

Zadanie 4. Oblicz pierwiastki:

- (a) $\sqrt[3]{i}$,
- (b) $\sqrt[8]{1}$,
- (c) $\sqrt[4]{-1}$,

(d) $\sqrt[3]{2-2i}$.

Zadanie 5. Znajdź wartość wyrażeń:

- (a) $e^{i\frac{\pi}{4}}$,
- (b) $\cos i$,
- (c) $\sin(1+i)$,
- (d) $\operatorname{tg}(2-i)$.

Zadanie 6. Rozwiąż równania:

- (a) $\cos z = 4$,
- (b) $\sin z = -2i$,
- (c) $(z^4 - 1)\sin(\pi z) = 0$.

Zadanie 7. Wyznacz obraz obszaru D przy homografii f , gdzie:

- (a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ oraz $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$,
- (b) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < \sqrt{2} \wedge |z+i| < \sqrt{2}\}$ oraz $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.