

ZADANIE Z ROZWIĄZANIEM

Zadanie. Rozwiąż równanie

$$\cos z = -i.$$

Rozwiązanie. Zaczynamy od zastosowania wzoru na cosinus:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -i.$$

Szukamy liczby zespolonej $z = x + iy$ spełniającej powyższe równanie. Zauważmy, że $iz = i(x + iy) = ix + i^2y = -y + ix$. Zatem dostajemy

$$\frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} = -i.$$

Korzystając teraz ze wzoru na e^z otrzymujemy

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos(-x) + i \sin(-x)) = -2i.$$

Ponieważ $\cos(-x) = \cos(x)$ oraz $\sin(-x) = -\sin x$, powyższe równanie przybiera postać

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x) = -2i.$$

Grupujemy część rzeczywistą i urojoną po lewej stronie:

$$e^{-y} \cos x + e^y \cos x + i(e^{-y} \sin x - e^y \sin x) = -2i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone po obu stronach otrzymujemy układ równań

$$(*) \quad \begin{cases} e^{-y} \cos x + e^y \cos x = 0, \\ e^{-y} \sin x - e^y \sin x = -2. \end{cases}$$

Rozważmy pierwsze równanie:

$$\cos x(e^{-y} + e^y) = 0.$$

Wtedy $\cos x = 0$ lub $e^{-y} + e^y = 0$. Zauważmy, że drugie równanie nie ma rozwiązań, ponieważ $e^{-y}, e^y > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej y . Zatem $\cos x = 0$, czyli $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozważymy teraz dwa przypadki.

1. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

W tym przypadku $\sin x = 1$. Zatem drugie równanie z układu (*) upraszcza się do

$$e^{-y} - e^y = -2.$$

Korzystając z podstawienia $t = e^y$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} - t &= -2 \\ 1 - t^2 &= -2t \\ -t^2 + 2t + 1 &= 0 \end{aligned}$$

To równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad t_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Zatem

$$e^y = 1 + \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad e^y = 1 - \sqrt{2}.$$

Drugie równanie nie ma rozwiązań, ponieważ $e^y > 0$. Czyli $y = \ln(1 + \sqrt{2})$.

2. $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$

W tym przypadku $\sin x = -1$. Zatem drugie równanie z układu (*) upraszcza się do

$$-e^{-y} + e^y = -2.$$

Korzystając z podstawienia $t = e^y$ otrzymujemy

$$-\frac{1}{t} + t = -2$$

$$-1 + t^2 = -2t$$

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

To równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = -1 + \sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad t_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

Zatem

$$e^y = -1 + \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad e^y = -1 - \sqrt{2}.$$

Drugie równanie nie ma rozwiązań, ponieważ $e^y > 0$. Czyli $y = \ln(\sqrt{2} - 1)$.

Podsumowując, otrzymaliśmy następujące rozwiązania:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \ln(\sqrt{2} + 1) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \\ y = \ln(\sqrt{2} - 1) \end{cases}.$$