

POWTÓRKA (CZĘŚĆ I)

1. Równania Cauchy'ego-Riemanna dla funkcji rzeczywistych $u(x, y)$ i $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. Funkcja rzeczywista $u(x, y)$ klasy C^2 jest funkcją harmoniczną, gdy jej laplasjan jest równy 0, czyli gdy

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. Funkcje harmoniczne $u(x, y)$ i $v(x, y)$ związane warunkami Cauchy'ego-Riemanna nazywamy funkcjami harmonicznymi sprzężonymi.

ZADANIA

Zadanie 1. Sprawdź, czy poniższe funkcje są funkcjami harmonicznymi. Jeśli tak, to wyznacz do nich funkcje harmoniczne sprzężone.

- (a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$,
- (b) $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x$,
- (c) $u(x, y) = e^x - e^y$,
- (d) $u(x, y) = 2xy + 3x$.

POWTÓRKA (CZĘŚĆ II)

1. Równanie o rozdzielonych zmiennych, czyli postaci

$$p(y)\frac{dy}{dx} = q(x)$$

rozwiązujemy w następujący sposób: „przerzucamy” dx na prawą stronę otrzymując $p(y)dy = q(x)dx$, a następnie całkujemy obie strony.

2. Równanie jednorodne względem x i y , czyli postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

rozwiązujemy w następujący sposób: stosujemy podstawienie $u = \frac{y}{x}$ oraz $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, a następnie rozwiązujemy otrzymane równanie o rozdzielonych zmiennych.

3. Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

rozwiązujemy w następujący sposób: stosujemy podstawienie $u = ax + by + c$ oraz $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{du}{dx} - \frac{a}{b}$, a następnie rozwiązujemy otrzymane równanie o rozdzielonych zmiennych.

ZADANIA

Zadanie 2. Rozwiąż poniższe równania metodą rozdzielania zmiennych:

(a) $xy = (1+x)(1+y)\frac{dy}{dx},$

(b) $\sin x \sin y \frac{dy}{dx} = \cos x \cos y,$

(c) $e^{-1/x}y^3 + x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0,$

(d) $e^y(1+x^2)\frac{dy}{dx} - 2x(1+e^y) = 0,$

(e) $\frac{dy}{dx} = \sin y,$

(f) $x(1+e^y) - e^y\frac{dy}{dx} = 0.$

Zadanie 3. Rozwiąż poniższe równania stosując odpowiednie podstawienia:

(a) $x + y + x\frac{dy}{dx} = 0,$

(b) $8y + 10x + (5y + 7x)\frac{dy}{dx} = 0,$

(c) $(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0,$

(d) $\frac{dy}{dx} = (4x - 2y + 1)^2,$

(e) $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2 + 1,$

(f) $\frac{dy}{dx} = \sin(x - 2y),$

(g) $\frac{dy}{dx} = (4x - 2y + 1)^2,$

(h) $x - 2y + 9 - (3x - 6y + 19)\frac{dy}{dx} = 0.$