

POWTÓRKA

1. Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x)$$

rozwiązujemy metodą uzmienniania stałej: najpierw rozwiązujemy równanie uproszczone $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = 0$, a następnie w otrzymanym wyniku uzmienniamy otrzymaną stałą (powiedzmy C), czyli traktujemy ją jako funkcję zmiennej x . Po odpowiednich przekształceniach rozwiązujemy wyjściowe równanie.

2. Równanie różniczkowe Bernoulliego, czyli postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n, \quad n \neq 0, 1$$

rozwiązujemy w następujący sposób: stosujemy podstawienie $z = y^{1-n}$, przekształcamy dostając $y = z^{\frac{1}{1-n}}$, czyli $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} \frac{dz}{dx}$, a następnie wyjściowe równanie sprowadzamy do równania, które da się rozwiązać metodą uzmienniania stałej.

3. Równanie różniczkowe rzędu drugiego sprowadzalne do równania rzędu pierwszego, czyli zawierające y'' i y' , ale niezawierające y rozwiązujemy w następujący sposób: stosujemy podstawienie $u = y'$, przekształcamy dostając $y'' = u'$, podstawiamy do wyjściowego równania i rozwiązujemy równanie pierwszego rzędu. Otrzymujemy rozwiązanie dla u , więc na koniec rozwiązujemy równanie $y' = u$.

ZADANIA

Zadanie 1. Rozwiąż poniższe równania metodą uzmienniania stałej:

- (a) $x \frac{dy}{dx} - y = 2x^3$,
- (b) $\frac{dy}{dx} \sin x + y \cos x = 2 \sin x$,
- (c) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$,
- (d) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$,
- (e) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2$,
- (f) $\frac{dy}{dx} = 3y + 2$,
- (g) $x \frac{dy}{dx} = 2y + x + 1$.

Zadanie 2. Rozwiąż poniższe równania Bernoulliego:

- (a) $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \sqrt{y}$,
- (b) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = x \sqrt{y}$,
- (c) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$,
- (d) $2xy \frac{dy}{dx} + x = y^2$,
- (e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} = -\frac{(x+1)^3}{2} y^3$,

(f) $3\frac{dy}{dx} - \sin x \cdot y + 3y^4 \sin x = 0,$

(g) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} - xy - x^2y^2 = 0,$

(h) $\frac{dy}{dx} - \frac{4x}{3(1+x^2)}y = \frac{2x^3}{3\sqrt{y}}.$

Zadanie 3. Rozwiąż poniższe równania wyższych rzędów:

(a) $y'' = \sin x \cos x,$

(b) $y'' = \frac{1}{1+x^2},$

(c) $y'' = x + \sin x,$

(d) $xy'' + y' = 0,$

(e) $xy'' = y',$

(f) $x^2y'' = (y')^2,$

(g) $y'y'' = 1 + x,$

(h) $xy'' - y' = e^x x^2.$