

POWTÓRKA I: RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE WYŻSZEGO RZĘDU

1. Jednorodne równania różniczkowe drugiego rzędu, czyli równania postaci

$$ay'' + by' + cy = 0$$

rozwiązujemy w następujący sposób: tworzymy wielomian charakterystyczny równania: $ar^2 + br + c$ i wyznaczamy jego pierwiastki r_1 i r_2 . Mamy trzy przypadki:

- jeżeli $r_1 \neq r_2$ oraz $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (czyli $\Delta > 0$), to rozwiązaniem równania jest $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$;
 - jeżeli $r_1 = r_2$ oraz $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (czyli $\Delta = 0$), to rozwiązaniem równania jest $y = e^{r_1 x}(Ax + B)$;
 - jeżeli $r_1 \neq r_2$ oraz $r_1 = s + it$ i $r_2 = s - it$ (czyli $\Delta < 0$), to rozwiązaniem równania jest $y = e^{sx}(A \sin tx + B \cos tx)$.
2. Niejednorodne równania różniczkowe drugiego rzędu (lub ogólniej: rzędu n), czyli równania postaci

$$ay'' + by' + cy = F(x)$$

rozwiązujemy w następujący sposób: rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

otrzymując pewne rozwiązanie y_1 . Następnie „przewidujemy rozwiązanie”:

- jeżeli $F(x)$ jest wielomianem stopnia k , to przewidujemy rozwiązanie $y_2 = C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_1 x + C_0$;
- jeżeli $F(x)$ jest funkcją postaci $k_1 \sin cx + k_2 \cos cx$, to przewidujemy rozwiązanie $y_2 = A \sin cx + B \cos cx$;
- jeżeli $F(x)$ jest funkcją postaci ke^{cx} , to przewidujemy rozwiązanie $y_2 = De^{cx}$.

Na podstawie przewidzianego rozwiązania obliczamy y'_2 oraz y''_2 i do głównego równania za y , y' oraz y'' podstawiamy y_2 , y'_2 oraz y''_2 . Następnie wyliczamy wartości $C_k, \dots, C_0$ lub A, B lub D . Ostateczne rozwiązanie równania to $y = y_1 + y_2$.

ZADANIA I

Zadanie 1. Rozwiąż poniższe równania różniczkowe drugiego rzędu:

- (a) $y'' + 4y' + 3y = 0$,
- (b) $y'' + 2y' + y = 0$,
- (c) $y'' + 2y' + 2y = 0$,
- (d) $y'' + 5y' + 6y = x^2 + 3x - 1$,
- (e) $y'' - 2y' + y = 4 \sin 3x$,
- (f) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{3x}$.

POWTÓRKA II: FUNKCJE WEKTOROWE

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $\mathbb{E}_*^3$ oznacza zbiór wszystkich wektorów w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$. Funkcję $\mathbf{r}: X \rightarrow \mathbb{E}_*^3$ nazywamy *funkcją wektorową jednej zmiennej*. Dla $u \in X$ każdy wektor $\mathbf{r}(u) \in \mathbb{E}_*^3$ możemy zapisać jako $\mathbf{r}(u) = [x(u), y(u), z(u)]$.

Niech $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ będą funkcjami wektorowymi zmiennej u , niech f będzie funkcją rzeczywistą oraz c stałą. Wtedy:

- (a) $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2'$,
- (b) $(c\mathbf{r}_1)' = c \cdot \mathbf{r}_1'$,
- (c) $(f\mathbf{r}_1)' = f'\mathbf{r}_1 + f\mathbf{r}_1'$,
- (d) $(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2'$,
- (e) $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2'$,
- (f) $(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)' = \mathbf{r}_1' \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2' \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3'$.

Niech L będzie krzywą regularną określoną równaniem parametrycznym $\mathbf{r}(u)$, gdzie u należy do pewnego otwartego przedziału (a, b) liczb rzeczywistych. Wtedy długość łuku krzywej L między punktami a i b wyraża się wzorem

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(u)| du,$$

lub

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du,$$

gdy $\mathbf{r}(u) = [x(u), y(u), z(u)]$. Jeżeli krzywa L jest krzywą płaską i daje się opisać za pomocą równania $y = y(x)$, to wtedy długość łuku L możemy policzyć za pomocą wzoru

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Dla każdej krzywej regularnej określonej regularnym przedstawieniem parametrycznym $\mathbf{r}(u)$ istnieje regularne przedstawienie parametryczne $\mathbf{r}[u(s)]$, gdzie parametr s jest określony wzorem

$$s(u) = \int_{u_0}^u |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Takie przedstawienie nazywamy *naturalnym przedstawieniem parametrycznym* krzywej.

ZADANIA II

Zadanie 2. Oblicz pochodne funkcji wektorowych:

- (a) $\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'$,
- (b) $\mathbf{r}'' \mathbf{r}' \mathbf{r}$,
- (c) $(\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}'$,
- (d) $(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')$,
- (e) $\sqrt{(\mathbf{r} \times \mathbf{r}')}$.

Zadanie 3. Jakie krzywe są opisane za pomocą poniższych równań parametrycznych:

- (a) $\mathbf{r}(u) = [u, 2u + 1, 3u - 1]$,
- (b) $\mathbf{r}(u) = [a \cos u, a \sin u, bu]$, gdzie $a, b > 0$?

Zadanie 4. Pokaż, że przedstawienia parametryczne

$$\mathbf{r}(u) = [a \cos u, b \sin u], \quad u \in (-\pi, \pi)$$

oraz

$$\mathbf{r}(t) = \left[a \frac{1-t^2}{1+t^2}, b \frac{2t}{1+t^2} \right], \quad t \in \mathbb{R},$$

gdzie $a, b > 0$, są przedstawieniami tej samej krzywej. Co to za krzywa? Podaj jej równanie w postaci uwikłanej.

Zadanie 5. Wyznacz długość łuku krzywej zawartego między podanymi punktami:

- (a) $y = \ln 1 - x^2$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$,
- (b) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$,
- (c) $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{3}$,
- (d) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^2 t$, $z = \cos 2t$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$,
- (e) $x = t + \frac{t^3}{3}$, $y = t - \frac{t^3}{3}$, $z = t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zadanie 6. Znajdź naturalne przedstawienie parametryczne poniższych krzywych przyjmując $u_0 = 0$:

(a) $\mathbf{r}(u) = [-a \sin u, a \cos u, b], \quad u \in \mathbb{R},$

(b) $\mathbf{r}(u) = [\cos^3 u, \sin^3 u, \cos 2u], \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}],$

(c) $\mathbf{r}(u) = [e^u, \sqrt{2}u, e^{-u}], \quad u \in \mathbb{R}.$

Zadanie 7. Pokaż, że krzywa $\mathbf{r}(s) = [\frac{4}{5} \cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5} \cos s]$ jest sparametryzowana naturalnie.