

POWTÓRKA

1. Niech dana będzie krzywa $\mathbf{r}(u) = [x(u), y(u), z(u)]$. Równanie *stycznej* do tej krzywej w punkcie $u \in \mathbb{R}$ ma postać

$$\frac{X - x(u)}{x'(u)} = \frac{Y - y(u)}{y'(u)} = \frac{Z - z(u)}{z'(u)}.$$

Dla krzywej płaskiej $\mathbf{r}(u) = [x(u), y(u)]$ równanie stycznej przybiera postać

$$\frac{X - x(u)}{x'(u)} = \frac{Y - y(u)}{y'(u)}.$$

Jeśli krzywa płaska jest określona równaniem $y = y(x)$ ($\mathbf{r}(u) = [x, y(x)]$), styczną można zapisać w postaci

$$Y - y(x) = y'(x)(X - x).$$

Jeśli krzywa płaska jest zadana w sposób uwikłany $F(x, y) = 0$, to styczna do tej krzywej w punkcie (x_0, y_0) jest wyrażona wzorem

$$\frac{X - x_0}{F_y(x_0, y_0)} = -\frac{Y - y_0}{F_x(x_0, y_0)}.$$

2. Równanie *płaszczyzny normalnej* do krzywej $\mathbf{r}(u) = [x(u), y(u), z(u)]$ w punkcie $u \in \mathbb{R}$ ma postać

$$[X - x(u)]x'(u) + [Y - y(u)]y'(u) + [Z - z(u)]z'(u) = 0.$$

Dla krzywej płaskiej $\mathbf{r}(u) = [x(u), y(u)]$ równanie prostej normalnej przybiera postać

$$[X - x(u)]x'(u) + [Y - y(u)]y'(u) = 0.$$

Jeśli krzywa płaska jest zadana w sposób uwikłany $F(x, y) = 0$, to normalna do tej krzywej w punkcie (x_0, y_0) jest wyrażona wzorem

$$\frac{X - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{Y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

3. *Rzędem styczności* krzywych y_1 oraz y_2 w punkcie x_0 nazywamy liczbę naturalną n taką, że dla każdej liczby naturalnej k mniejszej lub równej n zachodzi równość

$$y_1^{(k)}(x_0) = y_2^{(k)}(x_0) \quad \text{oraz} \quad y_1^{(n+1)}(x_0) \neq y_2^{(n+1)}(x_0).$$

4. *Okręgiem ściśle stycznym* do danej krzywej płaskiej w danym punkcie P nazywamy okrąg mający z tą krzywą w punkcie P styczność możliwie najwyższego rzędu. Równanie okręgu ma postać $(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2$, należy zatem wyznaczyć wartości A , B i R .

Jeśli krzywa jest zadana wzorem $y = y(x)$, to

$$A = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad B = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Jeśli krzywa jest opisana równaniami parametrycznymi $x = x(t)$, $y = y(t)$, to

$$A = x - \frac{(x'^2 + y'^2)y'}{x'y'' - x''y'}, \quad B = y + \frac{(x'^2 + y'^2)x'}{x'y'' - x''y'}, \quad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|}.$$

5. *Krzywizną* κ krzywej płaskiej nazywamy odwrotność promienia okręgu ściśle stycznego. Wartość tę wyliczamy zatem w następujący sposób.
Jeśli krzywa jest zadana wzorem $y = y(x)$, to

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Jeśli krzywa jest opisana równaniami parametrycznymi $x = x(t)$, $y = y(t)$, to

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Jeśli krzywa jest zadana w sposób uwikłany $F(x, y) = 0$, to

$$\kappa = \frac{\left| \det \begin{bmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{bmatrix} \right|}{(F'^2_x + F'^2_y)^{\frac{3}{2}}}$$

ZADANIA

Zadanie 1. Wyznacz równanie stycznej i normalnej do krzywej:

- (a) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ w punkcie $(x_0, y_0) = (4, -3)$,
- (b) $y = 0,5(e^x + e^{-x})$ w punkcie $(x_0, y_0) = (1, 1)$,
- (c) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^2 t$ w punkcie $t_0 = \frac{\pi}{2}$,
- (d) $\arctg \frac{x}{1+y^2} = 0$ w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, \frac{\pi}{4})$.

Zadanie 2. Oblicz rząd styczności:

- (a) krzywych $y_1 = x^3$ oraz $y_2 = x \sin x$ w punkcie początku układu współrzędnych,
- (b) paraboli $y = x^2 + x + 1$ oraz okręgu $x^2 + y^2 = 2$ w punkcie $(1, 1)$,
- (c) krzywych $y_1 = -\frac{1}{6}x^3 + x$ oraz $y_2 = \sin x$ w punkcie $(0, 0)$.

Zadanie 3. Znajdź okrąg ściśle styczny do krzywej:

- (a) $y = e^x$ w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 1)$,
- (b) $y = x^4 + x^2 - \frac{1}{2}$ w punkcie $(x_0, y_0) = (0, -\frac{1}{2})$,
- (c) $x(t) = 2a \sin^2 t$, $y(t) = 2a(\tg t - \frac{1}{2} \sin 2t)$ w punkcie $t = \frac{\pi}{4}$.

Zadanie 4. Znajdź krzywiznę krzywej:

- (a) $y = \sin x$ w punkcie $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2})$,
- (b) $y^2 = px$ w dowolnym punkcie,
- (c) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$ w dowolnym punkcie.