

POWTÓRKA

1. *Płaszczyzna ściśle styczna* do krzywej $\mathbf{r} = [x(u), y(u), z(u)]$ w punkcie u_0 wyraża się wzorem

$$\begin{vmatrix} X - x(u_0) & Y - y(u_0) & Z - z(u_0) \\ x'(u_0) & y'(u_0) & z'(u_0) \\ x''(u_0) & y''(u_0) & z''(u_0) \end{vmatrix} = 0.$$

2. *Punktem wyprostowania* krzywej $\mathbf{r} = [x(u), y(u), z(u)]$ nazywamy punkt, dla którego $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = 0$, czyli taki punkt u_0 , dla którego zachodzi równość

$$[x'(u_0), y'(u_0), z'(u_0)] \times [x''(u_0), y''(u_0), z''(u_0)] = 0.$$

3. *Punktem spłaszczenia* krzywej $\mathbf{r} = [x(u), y(u), z(u)]$ nazywamy punkt, w którym wektory $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ i $\mathbf{r}'''$ są komplanarne, czyli taki punkt u_0 , dla którego zachodzi równość

$$[x'(u_0), y'(u_0), z'(u_0)] \cdot ([x''(u_0), y''(u_0), z''(u_0)] \times [x'''(u_0), y'''(u_0), z'''(u_0)]) = 0.$$

4. *Płaszczyznę prostującą* danej krzywej w punkcie P nazywamy płaszczyznę przechodzącą przez P i prostopadłą do płaszczyzny normalnej i płaszczyzny ściśle stycznej. *Trójscianem Fréneta* w danym punkcie P nazywamy trójscian utworzony przez płaszczyzny ściśle styczną, normalną i prostującą.

5. Prosta przechodzącą przez punkt P , prostopadłą do stycznej w punkcie P i położoną w płaszczyźnie ściśle stycznej nazywamy *normalną główną*.

6. Prosta przechodzącą przez punkt P oraz prostopadłą do płaszczyzny ściśle stycznej nazywamy *binormalną*.

7. *Wektorami trójscianu Fréneta* danej krzywej $\mathbf{r}$ nazywamy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ i $\mathbf{b}$, gdzie:

- $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$ jest *wektorem kierunkowym stycznej* do danej krzywej,
- $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}$ jest *wektorem kierunkowym binormalnej* do danej krzywej,
- $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| |\mathbf{r}'|}$ jest *wektorem normalnym głównym* danej krzywej.

8. Równanie prostej stycznej do krzywej $\mathbf{r}$ w punkcie P wyraża się wzorem

$$\mathbf{r} + \lambda \mathbf{t}.$$

9. Równanie normalnej głównej do krzywej $\mathbf{r}$ w punkcie P wyraża się wzorem

$$\mathbf{r} + \lambda \mathbf{n}.$$

10. Równanie binormalnej do krzywej $\mathbf{r}$ w punkcie P wyraża się wzorem

$$\mathbf{r} + \lambda \mathbf{b}.$$

11. *Krzywizną* krzywej $\mathbf{r}$ w punkcie P nazywamy wartość

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}.$$

12. *Skręceniem* krzywej $\mathbf{r}$ w punkcie P nazywamy wartość

$$\tau = \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2},$$

przy założeniu, że $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| \neq 0$ w punkcie P .

13. *Środkiem krzywizny* krzywej $\mathbf{r}$ w punkcie P nazywamy koniec wektora $\mathbf{r} + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$.

ZADANIA

Zadanie 1. Wyznacz równanie płaszczyzny ściśle stycznej do krzywej:

- (a) $\mathbf{r} = [a \cos u, a \sin u, bu]$ w punkcie $u_0 = 0$,
- (b) $\mathbf{r} = [a \cos t, b \sin t, e^t]$ w punkcie $t_0 = 0$,
- (c) $\mathbf{r} = [\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t]$ w dowolnym punkcie tej krzywej.

Zadanie 2. Wyznacz równanie płaszczyzny ściśle stycznej krzywej $\mathbf{r} = [t, t^2, t^3]$ przechodzącej przez punkt $P = (2, -\frac{1}{3}, -6)$.

Zadanie 3. Wyznacz wektory $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ i $\mathbf{b}$ trójkątnemu Fréneta krzywej:

- (a) $\mathbf{r} = [t, t^2, t^3]$ w punkcie $t_0 = 0$,
- (b) $\mathbf{r} = [t \sin t, t \cos t, te^t]$ w punkcie $t_0 = 0$,
- (c) $\mathbf{r} = [e^t \cos t, e^t \sin t, e^t]$ w dowolnym punkcie tej krzywej.

Zadanie 4. Wyznacz równanie:

- (a) normalnej głównej krzywej $\mathbf{r} = [u, u^2, e^u]$ w punkcie $P = (0, 0, 1)$,
- (b) normalnej głównej i binormalnej krzywej $xy = z^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ w punkcie $P = (1, 1, 1)$.

Zadanie 5. Wyznacz punkty wyprostowania krzywej $\mathbf{r} = [u, \sin u, \sin 2u]$.

Zadanie 6. Wyznacz punkty spłaszczenia krzywej $\mathbf{r} = [\frac{a}{2}(1 + \cos u), \frac{a}{2} \sin u, a \sin \frac{u}{2}]$.

Zadanie 7. Wyznacz skręcenie krzywej $\mathbf{r} = [u \sin u, u \cos u, ue^u]$ w punkcie $u = 0$.

Zadanie 8. Wyznacz krzywiznę i skręcenie krzywej:

- (a) $\mathbf{r} = [e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}]$ w dowolnym punkcie tej krzywej,
- (b) $\mathbf{r} = [2t, \ln t, t^2]$ w dowolnym punkcie tej krzywej,
- (c) $\mathbf{r} = [3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3]$ w dowolnym punkcie tej krzywej.

Zadanie 9. Wyznacz środek krzywizny krzywej

- (a) $\mathbf{r} = [t^2, \frac{1}{3}t^3 - t, \frac{1}{3}t^3 + t]$ w punkcie $t_0 = 0$,
- (b) $\mathbf{r} = [e^t \cos t, e^t \sin t, e^t]$ w punkcie $t_0 = 0$.