

Zmienna losowa (kontynuacja)

Zadanie 1. Wyraż za pomocą dystrybuanty następujące prawdopodobieństwa:

a) $P(X \leq b)$, b) $P(X \geq b)$, c) $P(a < X \leq b)$, d) $P(a \leq X \leq b)$, e) $P(a < X < b)$.

Zadanie 2. Dana jest gęstości zmiennej losowej X :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2x - x^2) & \text{dla } x \in (0, 2), \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X i oblicz $P(X < 1)$.

Zadanie 3. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \leq -2, \\ A + B \arcsin \frac{x}{2} & \text{gdy } |x| < 2, \\ 1 & \text{gdy } x \geq 2. \end{cases}$$

a) Dla jakich A i B zmienna X jest zmienną losową ciągłą?

b) Wyznacz gęstość zmiennej losowej X .

Zadanie 4. Gęstość zmiennej losowej X ma postać

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & \text{gdy } |x| > a, \\ 0 & \text{gdy } |x| \leq a. \end{cases}$$

a) Wyznacz stałą a .

b) Wyznacz i narysuj dystrybuantę $F(x)$.

c) Oblicz i zaznacz na wykresach gęstości i dystrybuanty $P(|X| > 5)$,

d) Wyznacz x_0 takie, że $P(X \geq x_0) = \frac{1}{8}$.

Zadanie 5. Gęstość zmiennej losowej X ma postać

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{gdy pozostałych } x. \end{cases}$$

Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej a) $Y = e^{-X}$, b) $Z = \frac{1}{X^2}$.

Zadanie 6. Zmienna losowa X ma gęstość określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in [-1, 0], \\ -x + 1 & \text{dla } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y = e^X$.

Zadanie 7. Promień koła jest zmienną losową R o gęstości postaci

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < 0, \\ e^{-r} & \text{dla } r \geq 0. \end{cases}$$

Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $S = \pi R^2$.

Zadanie 8. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X :

x	$(-\infty, -2]$	$(-2, 1]$	$(1, 3]$	$(3, \infty)$
$F(x)$	0	0,2	0,8	1

Wyznacz jej rozkład prawdopodobieństwa.

Zadanie 9. Zmienna losowa X ma następujący rozkład prawdopodobieństwa:

x	-1	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1

Wyznacz: a) dystrybuantę, b) wartość oczekiwaną, c) wariancję, d) modę, e) medianę, f) kwantyl rzędu 0,6, g) kwantyl rzędu 0,4 zmiennej losowej X .

Zadanie 10. Zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_k = \frac{(-1)^k 2^k}{k}$ z prawdopodobieństwami $p_k = \frac{1}{2^k}$, gdzie $k = 1, 2, 3, \dots$. Czy istnieje wartość oczekiwana zmiennej losowej X ?

Zadanie 11. Gęstość zmiennej losowej X ma postać

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 1, \\ \ln x & \text{dla } x \in (1, e), \\ 0 & \text{dla } x \geq e. \end{cases}$$

Wyznacz moment zwykły rzędu k oraz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X .

Zadanie 12. Zmienna losowa X ma gęstość

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^{a+1}} & \text{dla } |x| > 1 \quad (a > 0), \\ 0 & \text{dla } |x| \leq 1. \end{cases}$$

- Podaj warunek istnienia momentu rzędu k zmiennej losowej X .
- Dla jakich wartości a istnieje wariancja zmiennej losowej X ?
- Wyznacz $D^2(X)$.

Zadanie 13. Zmienna losowa X przyjmuje wartości:

- $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ z jednakowymi prawdopodobieństwami,
- $1, 2, 3, \dots, n$ z jednakowymi prawdopodobieństwami.

Znajdź wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej.

Zadanie 14. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x & \text{dla } |x| < 1, \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

Wyznacz a) wartość oczekiwaną, b) kwantyl rzędu 0,75 zmiennej losowej X .

Zadanie 15. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X .

Zadanie 16. Zmienna losowa X ma gęstość

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{dla } |x| \geq 1, \\ 0 & \text{dla } |x| < 1. \end{cases}$$

Wyznacz a) dystrybuantę, b) $P(|X| < 2)$. Otrzymany wynik zaznacz na wykresach gęstości i dystrybuanty. Oblicz c) wartość oczekiwaną, d) medianę, e) modę, f) kwantyl rzędu 5/6.

Zadanie 17. Wyznacz: a) modę, b) medianę, c) wartość oczekiwaną, d) kwantyl rzędu 1/8, e) kwantyl rzędu 5/8 zmiennej losowej X o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{4} |\sin x| & \text{dla } x \in [0, 2\pi], \\ 0 & \text{dla } x > \pi. \end{cases}$$

Zadanie 18. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany student pewnej grupy umie rozwiązać to zadanie wynosi 8/10. Prowadzący zajęcia sprawdza czy studenci potrafią poradzić sobie z tym zadaniem prosząc o podanie rozwiązania kolejnych losowo wybranych studentów. Sprawdzanie kończy się po przepytaniu 3 studentów lub w momencie trafienia na osobę, która potrafi je rozwiązać. Studenci odpowiadają niezależnie od siebie. Wyznacz: a) funkcję prawdopodobieństwa, b) dystrybuantę, c) wartość oczekiwaną liczby przepytanych studentów.

Zadanie 19. Prawdopodobieństwo wyprodukowania sztuki wadliwej wynosi $p = 0,02$. Oblicz prawdopodobieństwo, że w partii towaru liczącej 300 sztuk znajdzie się: a) zero sztuk wadliwych, b) jedna sztuka wadliwa, c) dwie sztuki wadliwe, d) co najmniej trzy sztuki wadliwe.

Zadanie 20. Prawdopodobieństwo sukcesu w pewnym doświadczeniu wynosi 0,02. Niezależne doświadczenia przeprowadzamy do momentu wystąpienia sukcesu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzeba będzie przeprowadzić 4 doświadczenia?

Zadanie 21. Pewien komputer składa się z 1000 elementów. Prawdopodobieństwo zepsucia się jednego elementu w ciągu roku pracy jest równe 0,001 i nie zależy od stanu reszty komputera ani warunków zewnętrznych. Jakie jest prawdopodobieństwo zepsucia się w ciągu roku pracy dwóch elementów? Jakie jest prawdopodobieństwo zepsucia się nie mniej niż dwóch elementów?

Zadanie 22. Przy masowych prześwietleniach małoobrazkowych prawdopodobieństwo trafienia na człowieka chorego na gruźlicę wynosi 0,01. Niech X oznacza liczbę chorych na gruźlicę wśród 200 losowo wybranych osób. Oblicz: a) $P(X < 3)$, b) $P(X > 5)$, c) $P(1 \leq X \leq 4)$.

Zadanie 23. Z przystanku odjeżdżają autobusy co 10 minut. Rozkład czasu przybycia pasażera na przystanek jest jednostajny. Oblicz prawdopodobieństwo, że pasażer będzie czekał co najmniej 4 minuty.

Zadanie 24. Zmienna losowa X ma rozkład $N(0, 1)$. Oblicz (przy użyciu tablic statystycznych): a) $P(X > 1,1)$, b) $P(|X| > \frac{2}{5})$, c) $P(-0,78 < X < 5)$.

Zadanie 25. Zmienna losowa X ma rozkład $N(2, 8)$. Oblicz: a) $P(X > 4)$, b) $P(|X| < 2)$.

Zadanie 26. Zmienna losowa X ma rozkład $N(2, 3)$. Wyznacz x , dla którego: a) $P(X < x) = 0,6$, b) $P(X < x) = 0,4$, c) $P(X > x) = 0,1$, d) $P(|X + 2| > x) = 0,1$, e) $P(|X + 2| < x) = 0,98$.

Zadanie 27. Wzrost X w pewnej populacji chłopców ma rozkład $N(160, 10)$. Jaki jest wzrost określonego chłopca jeśli wiadomo, że co czwarty chłopiec z tej populacji jest od niego wyższy?

Zadanie 28. Dochód w złotych pewnej grupy pracowników ma rozkład normalny $N(1000, 200)$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród dwóch wylosowanych pracowników z tej grupy nie będzie ani jednego o dochodzie powyżej 1200 złotych.

Zadanie 29. Wzrost ludzi w pewnej populacji ma rozkład $N(170, 10)$. Wyznacz procent osób w tej populacji: a) mających wzrost poniżej 165 cm, b) mających wzrost powyżej 170 cm, c) mających wzrost powyżej 180 cm.

Zadanie 30. Losujemy niezależnie pięć liczb z rozkładu $N(1, 4)$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie z wylosowanych liczb będą większe od zera.